CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Extrait du

TROISIÈME COLLOQUE

DE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

TENU A BRUXELLES

DU 17 AU 19 DÉCEMBRE 1959

CBRM

LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
10, RUE DE LA MONNAIE
LOUVAIN (BELGIQUE)

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS
PARIS

1960

QUESTIONS D'EXISTENCE DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

PAR

M. Carlo Felice MANARA (Milan)

Cette conférence voudrait être une revue rapide des questions variées qui intéressent l'existence de variétés algébriques, des méthodes qui ont été appliquées pour résoudre de telles questions et des différents problèmes qui restent encore ouverts dans cet ordre d'idées.

Dans la première partie, nous nous occuperons des questions qui regardent l'existence de courbes algébriques planes, dans la seconde de questions qui regardent les plans multiples, dans la troisième de questions qui regardent les espaces multiples et les variétés multiples non linéaires.

PREMIÈRE PARTIE — COURBES ALGÉBRIQUES PLANES

Les questions d'existence concernant les courbes algébriques planes sont comme on sait celles qui se sont présentées avant toutes les autres dans l'ordre historique. Avant de poursuivre notre exposé, nous avertirons que dans la suite quand nous parlerons sans précision ultérieure de «courbe» nous entendrons parler de «courbe algébrique plane» laquelle sera aussi supposée irréductible, sauf avis contraire explicite. En outre, quand nous parlerons de «singularités» d'une courbe nous entendrons parler de celles qui viennent généralement désignées sous le nom de «singularités élémentaires», c'est-à-dire des nodes isolés et des cuspides; ceux-ci sont en effet les cas qui intéressent le plus pour les liens que les problèmes regardant les courbes ayant des singularités élémentaires présentent avec d'autres problèmes dont nous parlerons dans la suite.

Comme on le sait, les caractères numériques qui sont habituellement appelés «caractères plückériens» (ordre et classe, nombre des nodes et nombre des tangentes doubles, nombre des cuspides et nombre des tangentes d'inflexion) sont représentés par des nombres entiers non négatifs.

Il apparait toutefois immédiatement que l'existence de six nombres entiers non négatifs qui satisfont aux relations habituellement indiquées comme «formules de Plücker» n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une (au moins) courbe algébrique irréductible qui les admette comme caractères plückériens [3.2 — Livre II, § 21] (1).

On connait des démonstrations variées de non existence de courbes ayant certains caractères plückériens; quelques-unes de celles-ci ne sont pas valables parce que les courbes correspondantes ont été construites par des méthodes variées et qu'il en a été démontré l'irréductibilité.

Toutefois, le défaut de quelques-unes de ces démonstrations ne supprime pas l'existence du problème de garantir l'existence effective d'une courbe ayant certains caractères plückériens et l'utilité d'imaginer des méthodes pour établir l'existence de classes de courbes, les plus amples possible.

Il est à peine nécessaire d'observer que ce problème d'existence est bien différent de celui qui est résolu par le théorème de Riemann, qui assure l'existence d'une (au moins) fonction algébrique $y(x)$ de la variable indépendante x pour laquelle ont été assignés certains points critiques (en nombre pair) dans le plan-sphère Π_a de la variable complexe x.

Les méthodes qui ont été imaginées pour résoudre le problème qui nous intéresse sont substentiellement classées sous deux grandes catégories : méthodes algébriques et méthodes topologiques.

Nous pouvons affirmer que les méthodes du premier type (algébriques) sont historiquement les plus anciennes; parce qu'on est conduit à compter les conditions qui sont imposées aux coefficients d'une courbe quand on prescrit qu'elle doive posséder certaines singularités élémentaires déterminées. Les difficultés que l'on rencontre dans cette voie sont bien connues et nous nous bornerons à en donner ici un bref aperçu.

(1) Les indications écrites entre crochets se réfèrent à l'indice bibliographique se trouvant à la fin de cet exposé.

Avant tout, il apparait nécessaire de garantir que les conditions que l'on impose sont effectivement indépendantes, et dans le cas contraire, examiner combien, et lesquelles sont indépendantes. Le doute que les conditions imposées à une courbe d'un ordre donné par l'imposition de posséder certaines singularités ne soient pas toutes indépendantes s'était déjà présenté à l'occasion des premières critiques qui furent avancées à l'affirmation du fait que le système de toutes les courbes d'ordre n douées de δ nodes et de k cuspides avait la dimension effective :

$$\tfrac{1}{2}\, n(n+3) - \delta - 2k.$$

Ce doute a été transformé en certitude par la construction faite par B. SEGRE [10.1] de systèmes de courbes planes dont la série caractéristique est spéciale et pour lesquels pourtant les conditions en question ne sont pas toutes indépendantes.

D'autre part, même quand on suppose résolue la question précédente concernant l'indépendance ou non des conditions qui viennent imposées aux courbes d'avoir certaines singularités, il reste à résoudre la question, aussi importante, de compter combien il y a de systèmes distincts de courbes satisfaisant aux conditions et si la courbe générique d'un de ces systèmes est irréductible ou non.

Un exemple élémentaire classique des phénomènes qui interviennent quand on impose certaines singularités à des courbes d'un ordre donné est fourni par les courbes du quatrième ordre avec trois nodes, lesquelles, comme on sait, se distribuent en deux systèmes ayant la même dimension : celui des courbes rationnelles irréductibles du quatrième ordre et celui des courbes dégénérées en une droite et en une courbe du troisième ordre.

Un autre exemple classique est celui des courbes d'ordre six avec six cuspides, qui se distribuent (au moins) en deux systèmes : celui formé des courbes dont les six cuspides sont sur une même conique et celui (non vide) des courbes restantes.

La théorie définitive des questions d'existence des courbes d'un ordre donné ayant seulement des nodes et l'analyse des systèmes relatifs a été faite par SEVERI [11.2]. Il reste toutefois beaucoup de questions difficiles non résolues quand on traite de courbes douées de cuspides. Dans cet ordre de questions la construction de courbes irréductibles à partir de courbes limites réductibles de telle sorte qu'elles possèdent des parties doubles ou multiples présente de grosses difficultés.

L'analyse des modalités de dégénérescence de l'enveloppe d'une courbe qui en variant vient à se décomposer en contenant des parties doubles montre qu'il se présente des phénomènes topologiques dont il faut tenir compte quand on veut exécuter le passage inverse [1.11, 5.5].

D'autres méthodes pour résoudre les problèmes qui nous intéressent ici sont celles de caractère topologique; de telles méthodes se rattachent substantiellement au concept de «tresse caractéristique» d'une courbe algébrique introduit par CHISINI [1.1] et qu'il a utilisé systématiquement pour la résolution de problèmes fondamentaux dans cet ordre d'idées.

Il ne nous est pas possible de traiter ici l'argument d'une manière détaillée; nous renverrons pour cela à la conférence [1.9] que CHISINI lui-même a faite à Liège, à l'occasion du deuxième Colloque de Géométrie algébrique. Nous nous limiterons ici à quelques brèves indications que nous espérons suffisantes pour que ce qui suit soit intelligible.

Considérons une fonction algébrique

$$y = y(x)$$

de la variable indépendante x, définie implicitement par une équation algébrique

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

en supposant que la courbe f représentée par l'équation (1) soit d'ordre n, irréductible et disposée d'une manière générique par rapport aux axes de coordonnées et en particulier qu'elle ne passe pas par le point à l'infini sur l'axe des y. Fixons un point x_0 du plan Π_a de la variable complexe x, qui soit l'image d'une valeur x_0 pour laquelle l'équation

$$f(x_0, y) = 0$$

ait des racines toutes distinctes. Considérons ensuite les m points qui sont indices des valeurs

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \tag{2}$$

chacun desquels est abscisse d'un point singulier de la courbe f représentée par (1) ou est point critique pour la fonction algébrique $y(x)$ définie par (1). Fixons maintenant un système de lacets

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m, \tag{3}$$

ne se rencontrant pas, chacun desquels part du point x_0 entourant une seule fois un des points (2). Supposons d'assigner la variable x comme fonction régulière d'une variable réelle t de manière que le point

$$x = x(t)$$

décrive le système de lacets (3). En même temps, supposons que le plan-sphère Π_a de la variable complexe y se meuve dans l'espace d'un mouvement régulier en fonction de t, par exemple en se maintenant toujours parallèle à un plan donné.

Les points

$$y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t), \ldots,\ y_m(t) \tag{4}$$

du plan Π_a qui sont images des racines de l'équation

$$f[x(t), y] = 0,$$

se meuvent dans l'espace décrivant un système de n lignes régulières, distinctes en m sections, chacune desquelles correspond à un des lacets (3).

Ce complexe de lignes, qui pour les besoins de l'analyse qui nous intéresse, peuvent être soumises à des homéomorphismes de l'espace ambiant et matérialisées par des fils, constitue ce que l'on appelle la «tresse caractéristique» de la courbe, en relation avec le système de lacets (3) fixé.

On voit immédiatement qu'à chacun des lacets (3) correspond une torsion déterminée de la tresse, torsion qui est caractérisée par la nature du point singulier (pour la courbe ou pour la fonction algébrique $y(x)$) dont l'abscisse a été entourée par le lacet.

Quand le point $x(t)$ retourne à la position x_0, après avoir décrit un lacet, le système des points (4) retourne en lui-même, sans que nécessairement tous les points retournent à leurs positions initiales. Quand le point $x(t)$ a épuisé le parcours de tous les lacets (3), chacun des points (4) est retourné dans le plan Π_a en sa position initiale et a décrit un fil qui s'est entortillé une seule fois autour de chacun des autres.

En relation à la tresse caractéristique, Chisini a démontré en 1954 [1.10] une théorème fondamental, qui affirme l'existence de chaque courbe algébrique dont on sait construire la tresse caractéristique (par exemple à partir d'une forme canonique) pourvu qu'entre les caractères plückériens de la courbe subsiste la relation

$$\delta + 2k < \tfrac{1}{2}\, n(n+3) - 3.$$

La démonstration de ce théorème a été obtenue par CHISINI par l'introduction de la «tresse amplifiée», c'est-à-dire de la tresse représentative de la fonction algébrique

$$y = \bar{y}(x)$$

ayant n déterminations, définie par une courbe C_n^r d'ordre $n + r$ ayant le point à l'infini de l'axe des y multiple d'ordre r; après avoir introduit le concept de «tresse amplifiée» CHISINI a ensuite fait voir par une analyse délicate (que nous ne pouvons reproduire ici) que la tresse de la fonction algébrique $\bar{y}(x)$ peut être modifiée par continuité jusqu'à la faire représenter la tresse d'une courbe décomposée en r droites passant par le point à l'infini de l'axe des y et en une courbe résiduelle irréductible d'ordre n ayant les propriétés et les singularités qui correspondent aux torsions de chaque fil de la tresse.

Ce résultat, de caractère intégral, complète en un certain sens d'autres résultats de caractère local [1.8] déjà obtenu par CHISINI lui-même (et déjà exposés par lui) et permet d'appliquer ces méthodes topologiques à la démonstration de l'existence de courbes planes ayant des caractères donnés.

Son utilité réside non seulement dans la possibilité de garantir l'existence des courbes, mais dans celle de pouvoir étudier, par ces moyens, les propriétés du plan complexe S_2 duquel a été supprimé l'ensemble des points appartenant à la riemannienne R d'une courbe algébrique.

Lorsque le nombre des déterminations de la fonction algébrique devient un peu élevé, les modèles matériels et les dessins deviennent difficilement maniables, mais il a été possible de construire une «algèbre des tresses» [2] qui a permis d'utiliser ces méthodes jusqu'à atteindre les résultats les plus intéressants dans cet ordre d'idées.

DEUXIÈME PARTIE — PLANS MULTIPLES

Comme on sait, on appelle «plan multiple» une fonction algébrique de deux variables

$$z = z(x, y) \tag{6}$$

définie implicitement par une équation algébrique

$$(7) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Dans la suite, nous supposerons que les déterminations de la fonction (6) sont plus de deux et que l'équation (7) est irréductible.

Il est bien connu que, en correspondance à l'équation (7), on peut construire une courbe

$$(8) \qquad \Phi(x, y) = 0$$

dont l'équation s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation (7) considérée comme équation en z. En général, Φ se décompose et contient des parties doubles : la projection de la courbe double de la surface F représentée par (7) et l'intersection du plan $z = 0$ avec le cône tangent à F au point à l'infini de l'axe des z. En supprimant de la courbe Φ les parties doubles ayant cette origine, il reste une courbe

$$(9) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

qui est appelée «courbe de diramation» de la fonction algébrique (6) (ou du plan multiple).

Cette courbe a certains caractères plückériens bien connus, mais toutefois le fait de posséder ces caractères ne suffit pas pour qu'une courbe soit la courbe de diramation d'un plan multiple. Il reste donc à résoudre le problème de caractériser la courbe φ au moyen de propriétés qui soient suffisantes pour affirmer qu'elle est courbe de diramation d'un plan multiple.

Par exemple, on sait que si la surface F est une surface du troisième ordre sans singularités et en position générique par rapport aux axes de coordonnées φ est une courbe du sixième ordre ayant six cuspides. La propriété caractéristique pour qu'elle soit courbe de diramation pour un plan multiple est que les six cuspides appartiennent à une même conique ou bien qu'ils forment un groupe équivalent (au sens de la théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe) à un groupe de points découpés sur φ par une droite.

Dans ce type de problèmes également, il est possible de distinguer des méthodes variées de résolution : il existe des méthodes de type algébrique et des méthodes de type topologique.

Les méthodes de type algébrique ont eu pour point de départ substantiellement un travail fondamental de B. SEGRE [10,2] qui a caractérisé les courbes de diramation des plans multiples qui sont appelés «généraux» c'est-à-dire ceux que l'on obtient quand la surface F est privée de singularités et est en position générique par rapport aux axes de coordonnées et par suite en particulier ne passe pas par le point à l'infini de l'axe des z.

Dans ce cas, la courbe φ est la projection d'une courbe de l'espace φ^* qui est l'intersection complète de deux surfaces : la surface F et la polaire du point à l'infini de l'axe des z par rapport à F. Vice-versa la courbe φ est caractérisée par la possession de certains caractères plückériens et par le fait que ses points singuliers se trouvent sur une certaine courbe déterminée, covariante de la courbe φ. Ceci s'obtient sur la base d'un théorème classique de Halphen qui permet de garantir que la courbe φ est la projection d'une courbe φ^* de l'espace, intersection complète de deux surfaces, l'une d'ordre n, l'autre d'ordre $n - 1$.

Une analyse ultérieure du système des surfaces passant par la courbe φ^* permet ensuite de conclure que parmi celles-ci, il en est une d'ordre n et une d'ordre $n - 1$ qui est la polaire du point à l'infini de l'axe des z par rapport à la précédente.

Une série de travaux importants sur la généralisation du théorème de Halphen en question ont permis à Tibiletti et à Marchionna d'étendre la méthode, sur laquelle nous venons de donner quelques indications, à la caractérisation de courbes φ qui sont de diramation pour des plans multiples qui rentrent dans ce que l'on appelle habituellement le « cas simple ». On dit que F vérifie le «cas simple» si elle est une surface d'ordre $n + r$ et a comme seule singularité un point de multiplicité r au point à l'infini sur l'axe des z, le cône tangent en ce point étant privé de parties doubles.

L'élaboration de ces résultats par cette voie a réclamé un délicat travail d'analyse.

Dans le cas où la fonction algébrique (6) a seulement trois déterminations (plans triples), il est possible de construire directement l'équation (7) à partir de la courbe φ qui est caractérisée par la possession de certains cuspides qui satisfont à certaines relations d'équivalence [1.12]. Dans cet ordre d'idées il a été également possible d'obtenir quelques résultats dans un champ un peu plus vaste, qui regarde des plans triples n'appartenant pas toujours au «cas simple».

Rappelons enfin que dans le cas des plans triples et quadruples il a été possible de construire directement, à partir de la courbe φ des systèmes de courbes pluritangentes à cette courbe. De telles courbes représentent les projections des sections planes de la surface F et la courbe φ est caractérisée comme leur enveloppe [8.12 et 2.9].

Il apparait toutefois fort difficile de poursuivre par cette voie de la construction directe, comme cela résulte de quelques cas de caractérisation qui intéressent des cas ne rentrant pas dans le «cas simple».

Dans cet ordre de problèmes on peut également utiliser des méthodes topologiques, dont l'origine remonte à un travail fondamental d'ENRIQUES [3.1] dans laquelle la courbe φ est caractérisée comme courbe de diramation à travers les propriétés du «groupe fondamental» du continu quadridimentionel ouvert que l'on obtient de la riemannienne du plan projectif duquel ont été tirés les points appartenant à la riemannienne de la courbe [12.1].

Mais également d'un autre point de vue l'instrument topologique s'est révélé de grande importance dans cet ordre de questions et précisément dans la démonstration du théorème appelé «théorème d'unicité birationnelle» des plans multiples. Ce théorème affirme que chaque fonction algébrique

$$\zeta = \zeta(x, y)$$

qui a le même nombre de détermination que la fonction (6) et la même courbe de diramation φ avec les mêmes singularités essentielles (1) peut être obtenue de (6) par une transformation birationnelle qui laisse fixe chaque droite de la gerbe ayant pour centre le point à l'infini sur l'axe des z.

La démonstration de ce théorème a été donnée par CHISINI [1.9] sous l'hypothèse restrictive que la courbe φ peut dégénérer en une courbe $\bar{\varphi}$ composée de parties doubles de telle sorte que les singularités de φ tendent vers les points d'intersection des parties doubles constituant $\bar{\bar{\varphi}}$. Et il a été possible de s'affranchir de ces hypothèses au moins dans le cas des plans triples [5.3] et d'obtenir le

(1) Rappelons qu'un point singulier de la courbe est dit «essentiel» à la courbe (en tant que courbe de diramation) si, en le supprimant, la courbe G que l'on obtient n'est plus courbe de diramation pour un plan multiple ayant le même nombre de déterminations parce qu'elle ne satisfait plus aux «conditions d'invariance» d'Enriques.

résultat sans supposer des variations déterminées de la courbe de diramation.

L'importance de ce théorème réside dans le fait qu'il peut servir de base à la caractérisation de la variété de diramation des espaces linéaires multiples et des variétés multiples non linéaires.

TROISIÈME PARTIE — ESPACES MULTIPLES ET VARIÉTÉS MULTIPLES NON LINÉAIRES

D'une manière tout-à-fait analogue à celle que nous avons employée pour définir le plan multiple, il est possible de définir un espace S_r multiple (avec $r > 2$) comme fonction algébrique

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{10}$$

définie par une équation algébrique

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_r, z) = 0. \tag{11}$$

Ici aussi ce qui est intéressant est le cas où la fonction (10) a plus de deux déterminations, l'équation (11) étant irréductible.

On a dans ce cas hypersurface de diramation

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

et la caractérisation de Φ peut être ramenée dans des cas variés à celle d'une courbe de diramation d'un plan multiple, sur la base du théorème d'unicité birationnelle dont nous avons fait mention.

Il est possible d'étendre aussi à la caractérisation des hypersurfaces de diramation des S_r multiples les méthodes algébriques dont nous avons parlé, comme l'a fait MARCHIONNA dans une série d'importants travaux sur l'argument [6].

Il a ensuite traité le problème de la caractérisation des variétés de diramation des variétés multiples, c'est-à-dire des fonctions algébriques à plusieurs valeurs d'un point P qui appartient non à un espace linéaire, mais à une variété algébrique.

Le théorème d'existence général a été donné dans ce cas par SEVERI [11.1]. MARCHIONNA a appliqué les méthodes algébriques et topologiques à ces difficiles questions, réussissant à caractériser de vastes classes de variétés de diramation et à démontrer les théorèmes correspondants d'unicité birationnelle.

[1] Chisini (Oscar)
[1] Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane, *Rend. Ist. Lomb.*, **66** (1933).
[2] Sulla curva di diramazione dei piani multipli, *Renc. Acc. Lincei,* Serie VI, 23 (1936).
[3] Altre curve di diramazione dei piani n-pli, *Rend. Acc. Lincei,* Serie VI, 29 (1939).
[4] Forme canoniche per il fascio caratteristico rappresentativo di una curva algebrica piana, *Rend. Ist. Lombardo,* **70** (1937).
[5] Sull'identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione, *Rend. Ist. Lombardo,* **77** (1944).
[6] Sull'identità birazionale di due funzioni algebriche di più variabili dotate di una medesima varietà di diramazione, *Rend. Ist. Lombardo,* **80** (1947).
[7] Dimostrazione delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione per un piano quadruplo, *Annali di Mat.*, **29** (1949).
[8] Sulla costruzione a priori delle trecce caratteristiche, *Annali di Mat.*, **33** (1952).
[9] Courbes de diramation des plans multiples et tresses algébriques, CBRM, Colloque de Géométrie Algébrique, Liège (1952).
[10] Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche, *Rend. Acc. dei Lincei,* Serie VIII, **17** (1954), note I e II, 18 nota III.
[11] Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia, *Rend. Acc. Lincei,* Serie IV, Vol. 26.
[12] O. Chisini e Manara (Carlo Felice)
Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli (due note), *Annali di Mat.*, **25** (1946); **26** (1947).

[2] Dedo (Modesto), Algebra delle trecce caratteristiche : relazioni fondamentali e loro applicazioni. Rendiconti Istituto Lombardo (1950).

[3] Enriques (Federigo)
[1] Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, *Annali di Mat.*, Serie IV, Vol. I (1923).
[2] Enriques (Federigo) e Chisini (Oscar), Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche (Bologna 1915).

[4] Godeaux (Lucien), Mémoire sur les surfaces multiples, *Mémoires in-8º de l'Acad. Roy. de Belgique*, **27** (1952).

[5] Manara (Carlo Felice)
[1] Sulle curve di diramazione dei piani multipli, *Rend. Ist. Lombardo,* **82** (1949).
[2] Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione, *Atti Seminario Matem. e Fisico della Università di Modena,* **5** (1950-51).
[3] Una condizione sufficiente per l'identità birazionale di due piani multipli, *Rend. Ist. Lombardo*, **85** (1952).
[4] Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plückeriani, *Boll. U.M.I.*, Serie III, Anno 6º (1951).
[5] Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie, *Rend. Acc. Lincei,* (8), **3** (1947).

[6] Marchionna (Ermanno)
[1] Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione, *Rend. Ist. Lombardo*, **85** (1952).
[2] Sulle proiezioni delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie, *Bell. U.M.I.*, Serie III, Anno 8º, n. 3 (1953).

[3] Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli, *Rend. Acc. Lincei*, (8), **11** (1951).
[4] Curve e varietà di diramazione per superficie ed ipersuperficie multiple generali, *Rend. Ist. Lombardo*, **85** (1952).
[5] Costruzione di una funzione algebrica di due e più variabili avente una assegnata varietà di diramazione, *Rend. Ist. Lombardo*, **86** (1953).
[6] Sull'identità birazionale delle ipersuperficie multiple diramate da una medesima varietà, *Annali di Matem.*, **37** (1954).
[7] Sulle varietà multiple non lineari : estensione del teorema di Enriques relativo all'esistenza dei piani multipli, *Annali di Matem*, **38** (1955).
[8] Sul gruppo fondamentale di una curva algebrica. Applicazione alle superficie multiple prive di curva diramante, *Annali di Matem.*, **41** (1956).

[7] MARCHIONNA-TIBILETTI (Cesarina)
[1] Costruzione a priori della sestica con 9 cuspidi, *Rend. Ist. Lombardo*, **85** (1952).
[2] Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione, *Rend. Acc. Lincei*, (8), **12** (1952).
[3] Determinazione algebrico geometrica di piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione, *Rend. Ist. Lombardo*, **86** (1953).
[4] Sostituzioni legate ad una curva di diramazione che possa degenerare in parti doppie, *Annali di Mat.*, **37** (1954).
[5] Trecce algebriche di curve di diramazione : costruzioni ed applicazioni, *Rend. Sem. Mat. di Padova*, **24** (1955).
[6] La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla traccia diramante, *Rend. Ac. Lincei*, (8), **18** (1955).

[8] MASOTTI BIGGIOGERO (Giuseppina)
[1] La caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli ottenuta mediante sistemi di curve pluritangenti, *Rend. Ist. Lombardo*, **80** (1947).
[2] Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli, *Rend. Ist. Lombardo*, **82** (1949).

[9] POMPILJ (Giuseppe)
[1] Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli, *Rend. Sem. Matem. Univ. di Roma* (1939).
[2] Su una classe di piani multipli rigati, *Rend. sem. Matem. Univ. di Roma* (1946).

[10] SEGRE (Beniamino)
[1] Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane con dati caratteri, *Rend. Acc. Lincei*, Serie VI, Vol. 10 (1929).
[2] Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali, *Mem. Acc. d'Italia*, Vol. I, n° 4 (1930).

[11] SEVERI (Francesco)
[1] Le varietà multiple diramate ed il loro teorema di esistenza, *Mem. de Mat. del Inst. Jorge Juan*, n° 4 (1946).
[2] Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica (Roma, 1958).

[12] ZARISKI (Oscar)
[1] On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch-curve, *Amer. Journ. of Math.*, Vol. LI (1929).
[2] On the non existence of curves of order 8 with 16 cusps, *Amer. Journ. of Math.*, Vol. LIII (1931).